



TITLE:

D.Gabaiによる、knot complement上のfoliationの構成 (Foliations and K-theory)

AUTHOR(S):

小林, 毅

CITATION:

小林, 毅. D.Gabaiによる、knot complement上のfoliationの構成(Foliations and K-theory).
数理解析研究所講究録 1985, 577: 164-194

ISSUE DATE:

1985-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99256>

RIGHT:

D. Gabai による, knot complement 上の foliation の構成

阪本 理 久 林 毅

§ 1.

1984年の暮, 結び目理論の懸案であった Property R 予想及び Poincaré 予想が D. Gabai により肯定的に解決された。この際, 本質的な役割を果たしたのは K の knot complement 上の foliation の存在定理である:

定理 (Gabai) K を S^3 内の非自明な結び目, S を K の minimal genus Seifert 膜とする。この時, K の complement $S^3 - N(K)$ 上の taut, finite depth foliation \mathcal{F} に関するものが存在する:

- S は \mathcal{F} の leaf.
- \mathcal{F} に $\partial N(K)$ に transverse に交わる。また $\mathcal{F}|_{\partial N(K)}$ は, foliation by circles.

本稿では, 上の定理の証明の概略を述べる事にする。尚, Gabai 自身の論文 [G2] も存在するので詳しくは, いろいろを参照されたい。

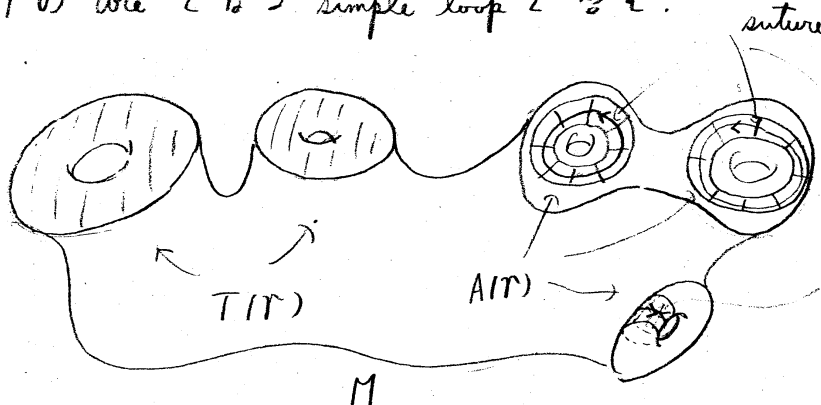
§1. 準備.

この節では, [G1] の結果のうち後で必要となるものを紹介しておく。用語等については Hempel [H], Gabai [G1] を参照されたい。

以下, M を compact, oriented 3-manifold とする。

定義. 組 (M, \mathcal{R}) が sutured manifold とは,

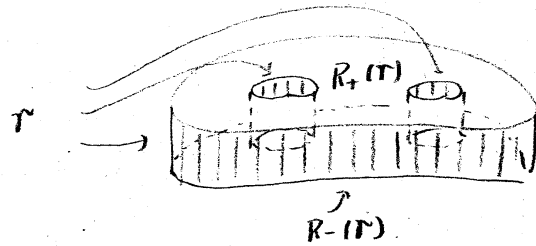
- (1) \mathcal{R} : a set of pairwise disjoint annuli $A(\mathcal{R})$, and tori $T(\mathcal{R})$
- (2) $A(\mathcal{R})$ の各成分は, suture と呼ばれる, 向きをついた, γ の core とする simple loop を含む。



(3) $R(\mathcal{R}) = \partial M - \dot{\mathcal{R}}$ の各成分には, 向きが与えられている。特に γ のうちの γ normal vector が外向き (内向き resp.) のものの全体の和を $R_+(\mathcal{R})$ ($R_-(\mathcal{R})$ resp.) と書く。

例. (product sutured mfd.). S を compact surface $\mathcal{R} \partial S \neq \emptyset$ なるものとする。この時, $M = S \times [0, 1]$, $\mathcal{R} = \partial S \times [0, 1]$,

$R_+(T) = SX\{1\}$, $R_-(T) = SX\{0\}$ とすれば sutured mfd. (M, T) を得る。



定義. \mathcal{F} : a codimension 1 foliation of M . L : a leaf of \mathcal{F} とする。

この時, L 及び \mathcal{F} の depth を \mathbb{R} のように定める。

L : depth 0 $\Leftrightarrow L$ compact

depth $j \leq k$ leaf が定まる, とする。この時

L : depth $k+1 \Leftrightarrow \bar{L} - L$: a union of depth $j \leq k$ leaves, $\bar{L} - L$ は, depth k leaf を含む。

また, \mathcal{F} : depth $k \Leftrightarrow k = \max \{ \text{depth } L \mid L: \text{a leaf of } \mathcal{F} \}$.

注意. leaf 及び foliation の depth は, 一般に定義出来るとは, 限らない。

定義. (M, T) : a sutured mfd. とする。この時:

(M, T) : taut とは, $\bullet M$: irreducible, 及び $\bullet R(T)$: norm minimizing in $H_2(M, T)$ なる事。

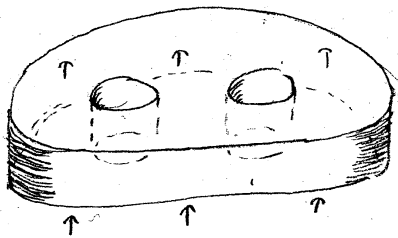
($H_2(M, T)$ の norm について) T は, Gabai [G1], or Thurston [T] 参照)

定義. \mathcal{F} : a transversely oriented codim. 1 fol. ^(of) a sutured mfd. (M, T) とする。この時, \mathcal{F} が taut とは, 次を満たす事とする。

1) \mathcal{F} は, \mathcal{R} に対し \mathcal{T} 横断的,

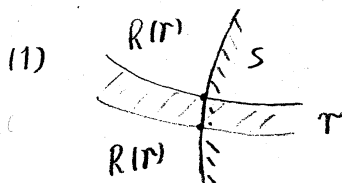
2) \mathcal{F} は, $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ に tangent. \mathcal{F} の normal direction $\mathcal{R}_+(\mathcal{F})$
 $(\mathcal{R}_-(\mathcal{F}) \text{ resp.})$ \mathcal{T} 外向き (内向き resp.).

例. Product sutured mfd. 上の product foliation は, taut

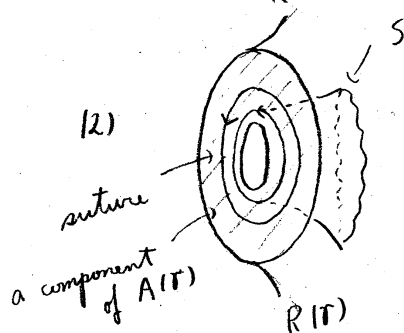


以下 sutured mfd. decomposition 及び sutured mfd. hierarchy を定義

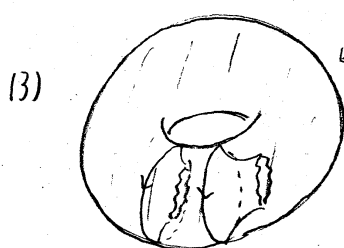
する. まず, (M, \mathcal{R}) を a sutured mfd. S を a properly embedded
oriented surface in M \mathcal{R} $S \cap \mathcal{R}$ の各 component は, \mathcal{R} の (1) すべりか下あるよ
 うなものとする.



: an essential arc in $A(\mathcal{R})$,



suture と向きま下込め \mathcal{T} parallel
 な simple loop. (但し ∂S の各成分には
 S の向きが induce される向きが入る) (1) とする)



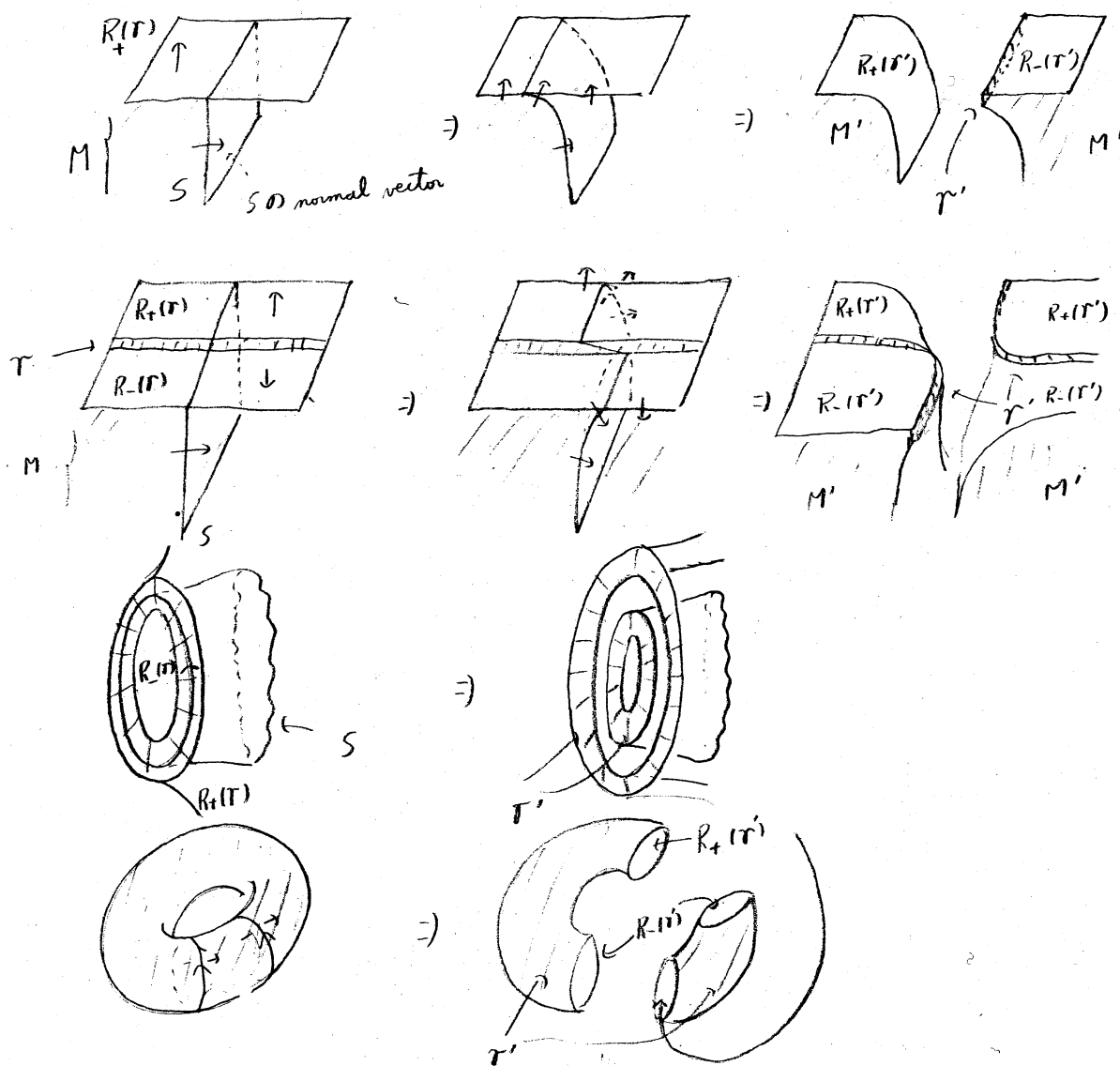
\mathcal{T} : a component of $\mathcal{T}(\mathcal{R})$

$\mathcal{T} \cap S$ は 向きま下込め \mathcal{T} parallel な
 essential loops 又は an essential loop

二の時. sutured mfd. decomposition $(M, T) \xrightarrow{S} (M', T')$ と
 次で定める.

$$\bullet M' = M - N(S)$$

$\bullet T'$ は, 次のように定める.



定義. sutured mfd. (M, T) が decomposable とは, sutured
 mfd. decomposition の sequence:

$$(M, \mathcal{R}) \xrightarrow{S_1} (M_1, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{R}_m)$$

↑ (M_m, \mathcal{R}_m) が a product sutured mfd. となるようなものが存在する事とする。またこの sequence のことを a sutured mfd. hierarchy と呼ぶ。

sutured mfd. hierarchy の存在に関しては、次の結果がある。

定理 ([G1]) (M, \mathcal{R}) を connected taut sutured mfd. とする。

また M が rational homology sphere の時は、essential torus を含むとする。

この時 (M, \mathcal{R}) の sutured mfd. hierarchy $(M, \mathcal{R}) \xrightarrow{S_1}$

$(M_1, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{R}_m)$ ↑ " V : a component of $R(\mathcal{R}_i)$ とすると

$S_{i+1} \cap V$ は、向きを下込め k parallel な $k (\geq 0)$ 本の non-separating simple closed curves, or arcs." となるものが存在する。

証明の

以下 §1. 下述の定理の概略を述べる事にする。尚、各

定義, Lemma の後に付いた番号は、全て Gabai の論文に

合わせたの所で所々に欠番がある事を予めお断りしておく。

§ 3.

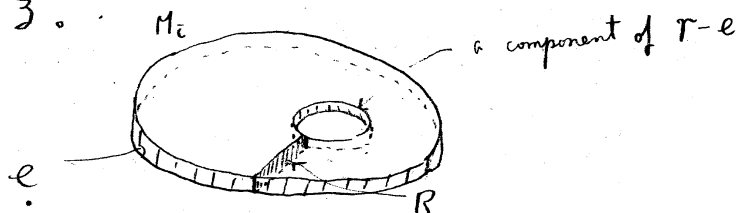
以下 M を knot K の exterior $S^3 - N(K)$ とする。

定義 3.2. $(M, \partial M) \xrightarrow{S_1} (M_1, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{R}_m)$: a sutured mfd.

hierarchy とする。この時 boundary suture $E_i \subset \partial M_i$ を \mathcal{R} のように定める。

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 = \partial M \\ E_i : \text{the union of those components of } E_i - \mathring{N}(S_i) \text{ which are annuli and tori} \end{array} \right.$$

1) e : a component of boundary suture とする。この時, e が boundary parallel とは, \mathcal{R} のような rectangle R が存在する事とする。



Notation 3.3. (M, \mathcal{R}) : a sutured mfd.

E : a distinguished set of annular component of \mathcal{R} とする。この時 sutured mfd. $(\hat{M}, \hat{\mathcal{R}})$ を \mathcal{R} のように定める。

\hat{M} : mfd. obtained by attaching 2-handle to M along each comp. of E

$\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - E$

\mathcal{R} の Lemma の証明は, [G1] の中下定義された sutured mfd. complexity を用いた議論を要するの以下二下は, 省略する。

Lemma 3.6. $(M, \partial M)$ に対し \mathcal{R} sutured mfd. decomposition の sequence

$$(M, \partial M) = (M_0, \tau_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, \tau_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \tau_m)$$

下記の様なものが存在する。

- 1) S_i : connected, $[S_i] \neq 0 \in H_2(M_{i-1}, \partial M_{i-1})$,
- 2) V : a component of $R(\tau_{i-1})$ とする と $S_i \cap V$ は、向きまたは ∂ の τ parallel な non separating simple closed curves, or arcs.
- 3) $E_{i-1} \cap S_i$: a union of simple closed curves,
- 4) $\hat{\partial M}_m$: a union of 2-spheres.

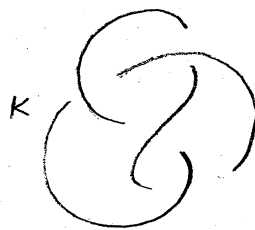
(\hookrightarrow distinguished suture とし E_m を とる.)

Remark: 結果的には、上の decomp. は (少し変形して) sutured mfd. hierarchy になる事が示される。

§4.

K : a knot in S^3 とする。

Convention 4.1. S^3 内の 2点 x, y を fix する。



この時 $S^3 - \{x, y\}$ は、 $S^2 \times \mathbb{R}$ と同相。

また S^2 内の 1点 z を fix すると $(S^2 - \{z\}) \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

いまこの第2成分 \mathbb{R} の射影 h を考え、これを height function とする。また Q_α ($\alpha \in \mathbb{R}$) を (この height h の) level

α -sphere (or plane) を表す。また level planes 上の $S^2 - \{x, y\}$ or $(S^2 - \{z\}) \times \mathbb{R}$ の foliation を \mathcal{H} と表す。

定義 4.2. $f: S^1 \rightarrow S^3$: a presentation of K (i.e. f は embedding,

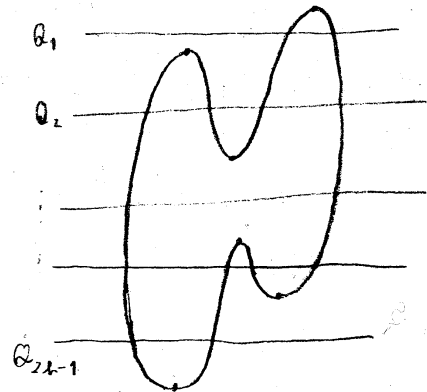
$\text{Image}(f) = K$) かつ $h \circ f$ が Morse function であるものとする。

いま $h \circ f$ の critical point は、2個あるとし、これを a, b とする。

全 7 異なる level にあるとする。 Q_1, \dots, Q_{2k+1} は各 critical point の間にある level planes とする。

この時、 K の width, $w(K)$ を
以下定める。

$$w(K) = \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_i |Q_i \cap f(S^1)| \right\}$$



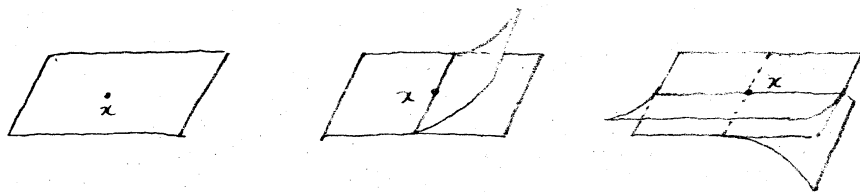
また、 f が $w(K)$ を実現している
時、 f は、thin presentation であると言う。

定義 4.4. M' を n -mfd. とする M' 上の p -dim. lamination L と
は、 M' 内の closed subset N の分割 $N = \bigcup_{\alpha} L_{\alpha}$ (L_{α} : connected) かつ次の
条件をみたすもの。

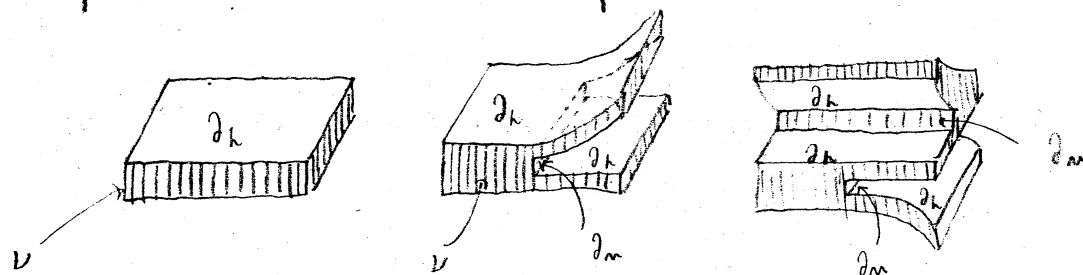
$\forall x \in M', \exists (U, \varphi)$: local coordinate of x s.t. 各 L_{α} に対して $U \cap L_{\alpha}$
の各 component は、 $\{y \in U : \varphi_1(y) = \text{const}, \dots, \varphi_{n-p}(y) = \text{const}\}$ の形。

また $\bigcup_{\alpha} U \cap L_{\alpha}$ の各 component を basis とする topology が L があるが
これを L_{α} の leaf topology と呼ぶ。

定義 4.7. 3-mfd. M 内の branched surface (with generic branched
locus) B とは、各点 $x \in B$ が次のような local model をもつ
 M の subspace



また B は、次のように表わす事も出来る。 M 内の 3-dim. submf. $N(B)$ 下流のように各 leaf が $I=[0,1]$ 下にあるような foliation



ν をもつものを考える。この時、 ν の各 leaf を 1 点につぶす操作を \sim 下表わすと $M/\sim \cong M$, この M/\sim 内下の $N(B)$ の image が B 下ある。又、 $\partial N(B)$ は ν と transverse な部分と tangent な部分に分れるので、それぞれを $\partial_h N(B)$, $\partial_v N(B)$ と表わす事にする。この $N(B)$ を B の fibered nbhd. と呼ぶ。

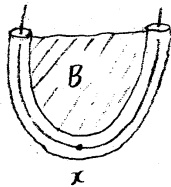
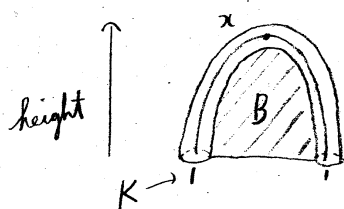
また、 M 内の lamination L が B によ、 τ carry されるとは、 B の fibered nbhd. $N(B)$ 下、" $L \subset N(B)$ " かつ " L は ν に transverse" なるものが存在する事とする。 L が B によ、 τ fully carried とは " L が B によ、 τ carry される" かつ " ν の各 leaf は L と交わる" 事とする。

定義 4.8. $M=S^3-\dot{N}(K)$ 内の branched surface B が normal form にあるとは、次の条件 1)~6) の条件を満たす事とする。

1) K は, thin presentation.

2) B は $N(K)$ の近くで次の状況:

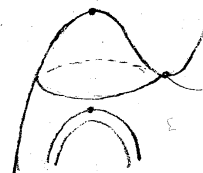
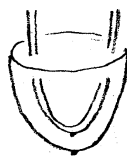
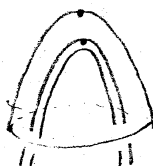
・ $x \in K$ が local max. or min. の時



・ $x \notin K$ の時

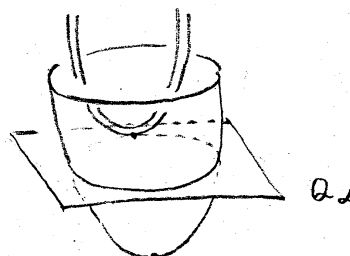
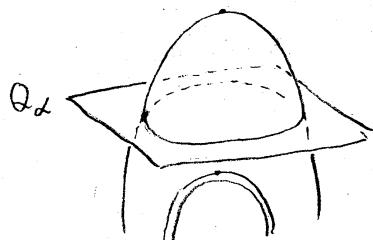


3) B は, isolated to 'saddle' 又は 'knot K の local max, or min. を包む center' を除いて \mathbb{H} に transverse



これは normal form による

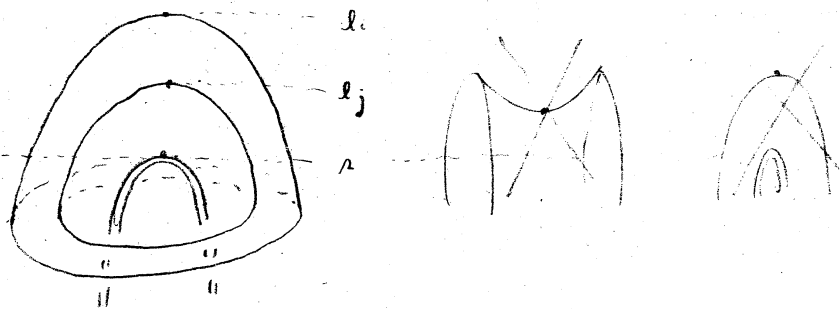
4) horizontal plane Q_x で " $Q_x \cap B$ の ϵ component C で $Q-B$ の disk component を bound する" 様なものが存在したとするとこれは 3) の center の 状況の一部。即ち Q_x を上げ (or 下げ) 7 叩くと center にぶつかり, Q_x を下げ (or 上げ) 7 叩くと knot の local max. (or min.) にぶつかる。



5) z_1, \dots, z_r : points of tangency of B with \mathbb{H} とする。

また z_i の height を h_i とする。この時 h_1, \dots, h_r は, K の local max, or min. とは異なる, 互いに相異なる level で生じる。

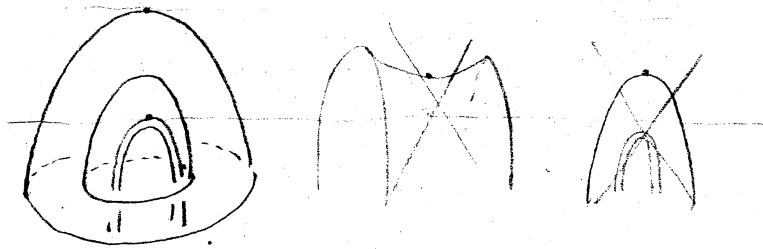
また z_i を height λ の K の local max. (or min.) を含む center とする. この時 " $\lambda < l_j < l_i$ (or $l_i < l_j < \lambda$) $\Rightarrow z_j$ は l_i と同じ K の local max. (or min.) を含む center.



6) height fun. | branched locus of B は, Morse function T , γ の critical point は, K の critical points と異なる discrete level T 生じる.

定義 4.9. $M = S^3 - N(K)$ 内の lamination L が normal form にあるとは, 次の条件 1) ~ 5) をみたす事とする

- 1) K は, thin presentation,
- 2) L の $N(K)$ の近く T 4.8 2) と同じ状況
- 3) L を a leaf of L とする. L は (leaf topology T) isolated to 'saddle' 又は, ' K の local max. or min. を含む center' と除 1) T 2) に transverse
- 4) horizontal plane $Q \times T$ " $Q \times \cap L$ の a comp. C T $Q - L$ の disk component を bound する" 様なものがあるとしたとすると.
これは 3) の状況の一部.
- 5) (4.8 5) に対応する条件)



次の Proposition は, 定義 4.8, 4.9 より直ちに従う.

Proposition 4.10. (1) ま, 'lamination L (M) は, normal form にある branched surface B により carry される' とする. この時 L は, normal form にある lamination に isotopic.

定義 4.13. B を oriented 3-mfd. P 内の transversely oriented branched surface とする. この時 $S(B) = (M, \tau)$; sutured mfd. defined by B を次のように定める.

$$\bullet M = P - N(B)$$

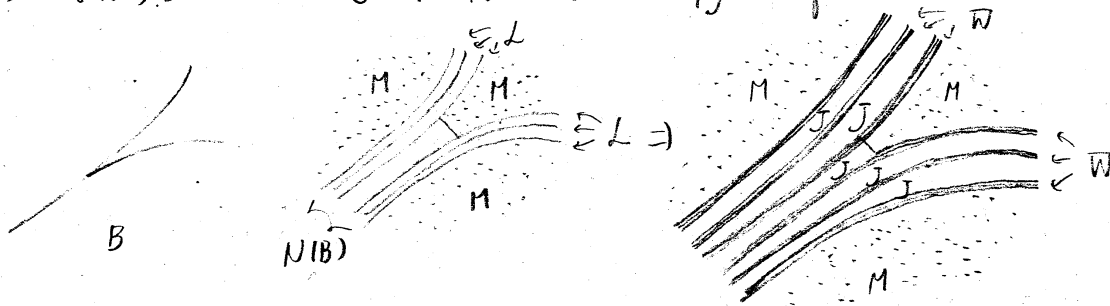
$$\bullet \tau = \partial_\infty N(B)$$

$\bullet R(\tau) = \partial_+ N(B)$, $R_+(\tau)$, $R_-(\tau)$ は, B の orientation から自然に定まる.

$N(B)$ は, I による fibration ν をもつ事と B に carry される lamination の定義及び定義 4.13 より次の Proposition は, 容易に証明出来る.

Proposition 4.14. B : a branched surface in P , L : a lamination fully carried by B . W : a lamination obtained by thickening L とする。

この時: $S(B)$ は W の complement に natural に埋め込める (時に $R(T) < 2W$)。また $J = P - (W \cup M)$ は ν/J を fibration とする



4.15. sutured mfd. decomp. seq. か3の branched surface の構成

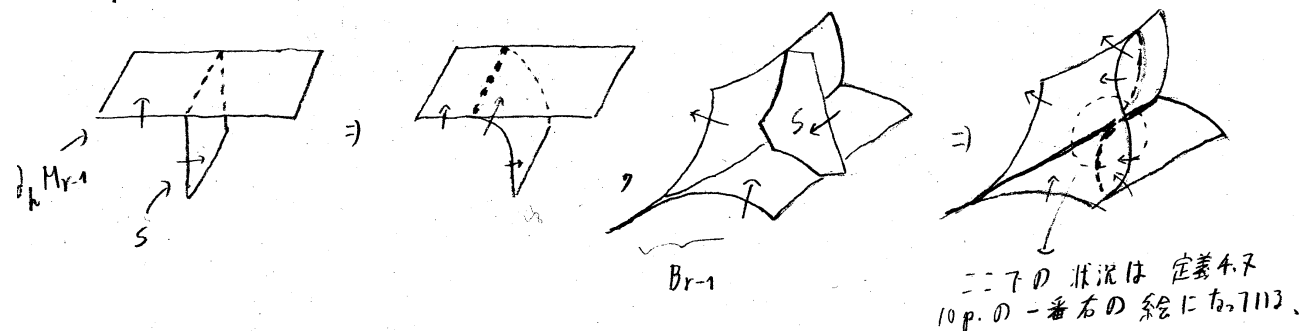
$(N, \partial N) = (M_0, T_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, T_m)$: a seq. of sutured mfd.

decomp. とする。この時, N に proper に埋め込まれた branched surface (with generic branched locus) $B_i \subset S(B_i) = (M_i, T_i)$ とする (i=1, ..., m) ようなものを決めるように帰納的に構成する

• $B_1 = S_1$

• B_1, \dots, B_{r-1} s.t. $S(B_i) = (M_i, T_i)$ が定まるとする。

$S(B_{r-1}) = (M_{r-1}, T_{r-1})$ より S_r は $N - \overset{\circ}{N}(B_{r-1})$ に proper に埋め込まれた surface. 従って B_r と決めるように決めればよい。

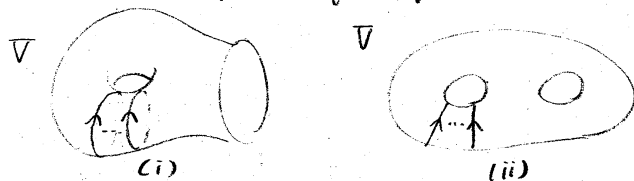


二つの状況は 定義4.7 10p. の一番右の絵に於いて。

4.16 Constructing finite depth lamination from sutured mfd. decomp.

$(N, \partial N) = (M_0, T_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_n} (M_n, T_n)$: a seq. of sutured mfd. decomp.

Suppose: V : a comp. of $R(T_i)$ とすると $V \cap S_i$ は, 向きま下込め \uparrow parallel to non-separating simple closed curves, or arcs.

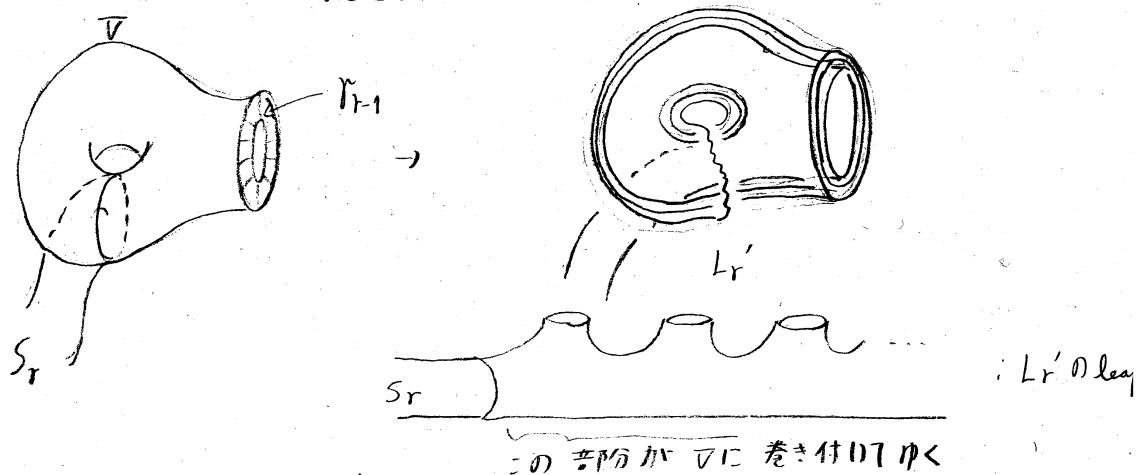


この時, L_i : finite depth lamination fully carried by B_i ($i=1, \dots, n$) を次のように帰納的に構成する。

• $L_1 = S_1$

• L_1, \dots, L_{r-1} が構成されたとする。この時 L_r を次のように構成する。まず 4.15 で得られる branched surface B_{r-1} から定まる N の分解 $M_{r-1} \cup W_{r-1} \cup J_{r-1}$ を考える。この時 $L_{r-1} \subset J_{r-1}$ 。 (i) ま $S_r \subset M_{r-1}$ と考え S_r の boundary を $R(M_{r-1})$ の component ($\uparrow S_r$ と交わるもの) に 向きを考えると 巻き付け \uparrow ゆく事により M_{r-1} の lamination L_r' \uparrow T_{r-1} と横断的 \uparrow あようにものを得る。

例えば上の絵の (ii) の場合。



Proof. Step 1. ($B_1 = T_1 (= S_1)$) を normal form にも, γ ゆく)

$(N_0, \delta_0) = (M, \partial M)$, $T_1 = S_1$ とする。まず general position の議論により $S_1 (= S)$ を次のような位置にも, γ ゆける。

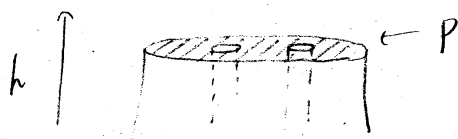
- S は, K の近く γ normal form (i.e. S_1 は, 4.8.12) をみたす)
- S は, 次の3つの状況を除く γ \mathcal{H} に横断的

saddle

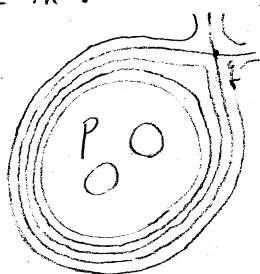
center in normal form (see 4.8.4)

plateau P (i.e. P は S に embed された surface γ

$P \perp \gamma$, h は, const., また h は, $P \gamma$ local max., or min.)

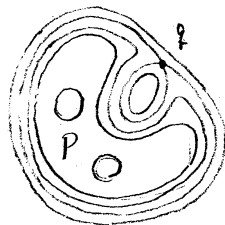


さて, plateau P ($\subset S$) の近く γ の $S \cap \mathcal{H}$ の状況を見る。 ∂P の少し外 γ は, foliation $S \cap \mathcal{H}$ は, product $\partial P \times I$ (leaf は $\partial P \times \text{pt.}$) の形になっ γ いるが、この条件により leaf を外側にたどっ γ ゆけば必ず saddle にぶつかかる事がわかる。これに注意して P を次の3つの type に分ける。



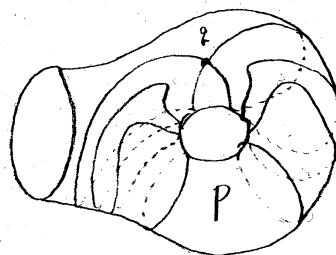
type I

∂P 上の1点が pinch する



type II

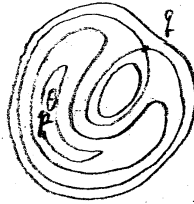
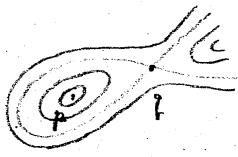
∂P の2 comp. 上の2点が squeeze する



type III

∂P の互いに異なる comp. 上の2点が squeeze する。

同様に各 center も次のように type I, II に分ける.



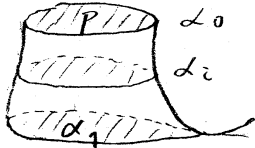
type I

type II

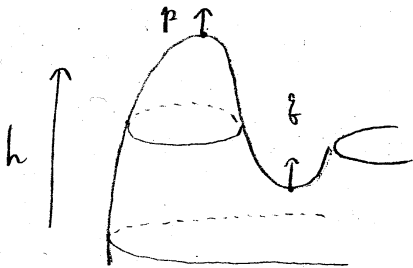
この時, $f: PXI \rightarrow S^3$ 下 $f(PXI03) = P$, $f|_{PXI(0,1)}$: embedding,

$f(PXI11) =$ となるものが存在する.

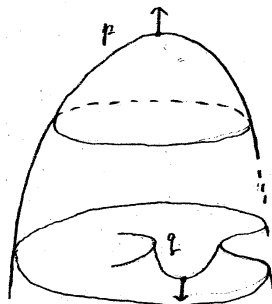
また $\alpha_i = f(PXI_i)$ とする (従, $\gamma \alpha_0 = P$).



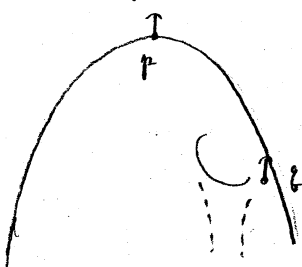
また type I, II を P (or P) と f 下の normal direction へ一致するか
どうか下のように A 型, B 型に分ける. 即ち:



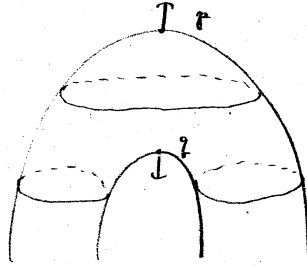
type Ia



type Ib



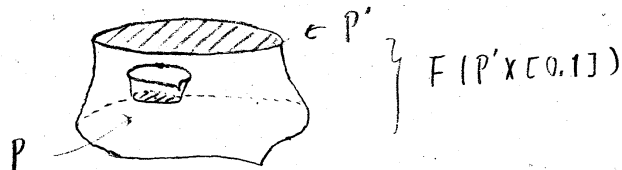
type IIa



type IIb

以上の状況のもと S の complexity (15) を 3 (plateaus の
個数) + 2 (centers の個数) で定める. また P' を local max.

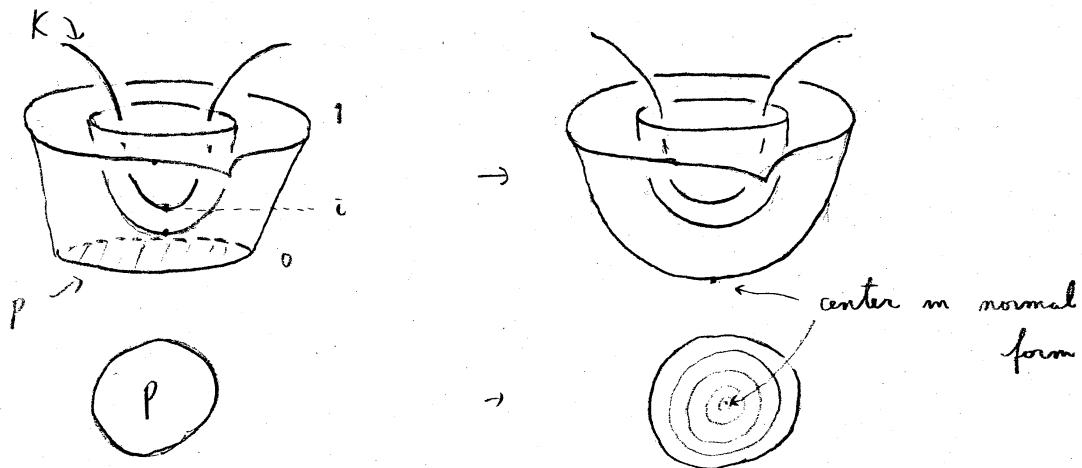
下ある plateaus のうち最も高さの低いもの, $P \in F(P' \times (0, 1))$ に含まれる plateaus のうち最も高さの高いものとする。(注: もし P' が存在しなければ P を local min. 下ある plateau 下最も高さの高いものとする。 P' も P も存在しない時は, 下の Case. 7 \wedge 行く)



Case 1. $K \cap F(P' \times [0, 1]) \neq \emptyset$

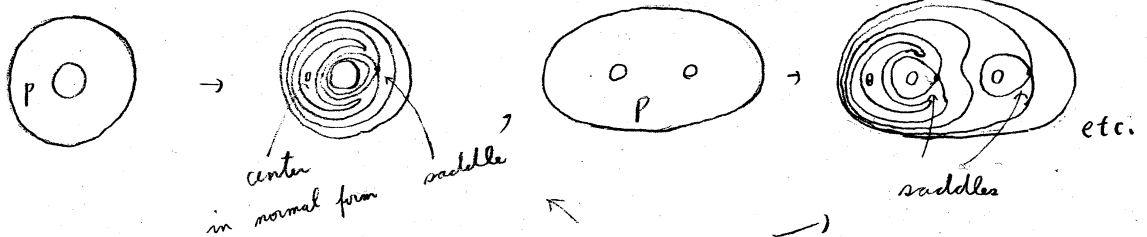
$\bar{c} = \min \{j \mid F(P' \times [0, j]) \cap K \neq \emptyset\}$ とする。即ち $F(P' \times [0, \bar{c})) \cap$

$K = \emptyset$, $F(P' \times \{\bar{c}\})$ は a local min. point of K . P が disk の時, S



を上図のように P の nbhd. 下変形して complexity を下げられる。

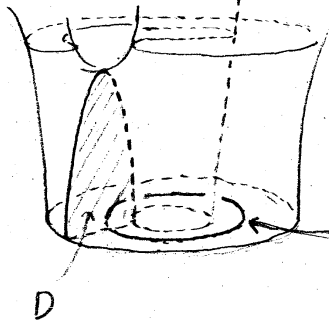
P が disk でない時も次のように S を変形して complexity を下げられる。



これらの saddle は, \bar{c} より高い所にある。
(\bar{c}) 下ある新しい center は, normal form 下あり)

以下, $K \cap F(PX[0.1]) = \emptyset$ とする.

Case 2 P is of type III



この時, 左の様に $D \cap S = \partial D$ となる disk

D がとれる。いま S 上の loop

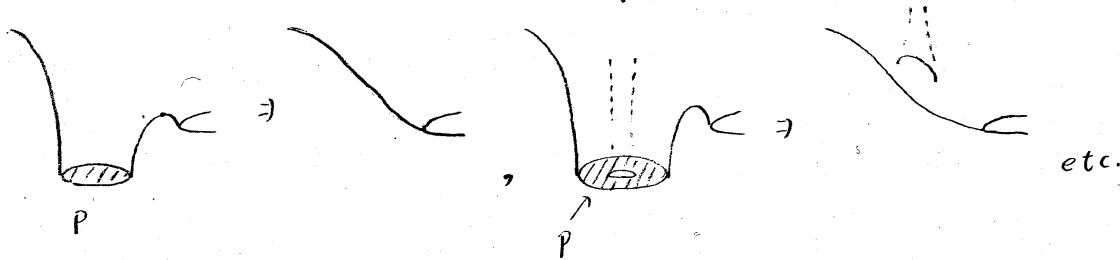
∂D と transverse に 1 点で交わるものが

存在するから ∂D は, S 上の essential loop.

これは, S が min. genus に矛盾.

Case 3 P is of type Ia

この場合, R のようにして complexity を下げられる。



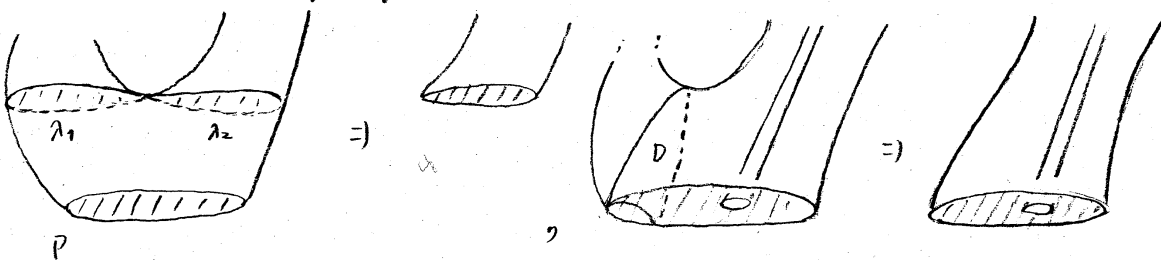
Case 4. P is of type Ib

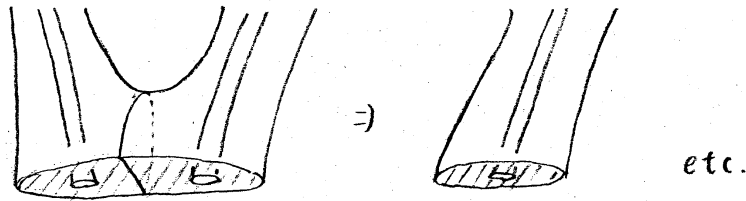


local min. とすると, P の取り方は "これは center ではない" となる。他方 この saddle の存在と $K \cap F(PX[0.1]) = \emptyset$ より上の center は, normal form ではない事がわかる: 矛盾.

Case 5. P is of type IIb

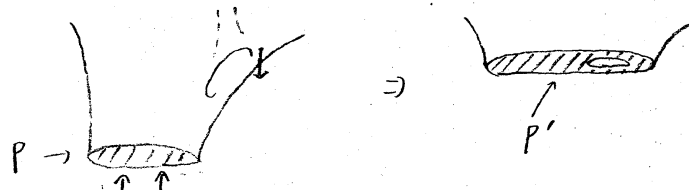
R のようにして complexity が下げられる。





Case 6. P is of type IIb

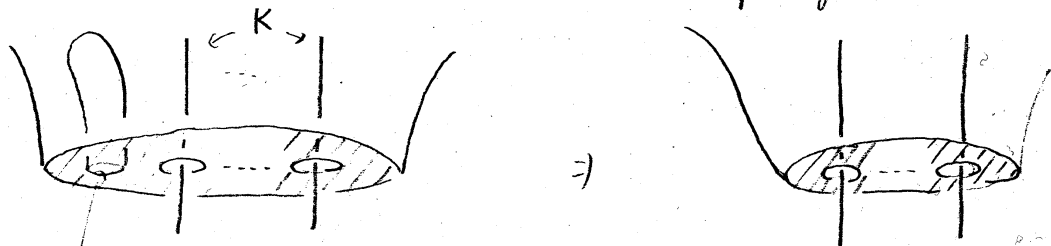
この時, P を次のように押し上げて Γ 、 Γ 新しい plateau を作る。



注: この時 $|X(P')| = |X(P)| - 1$, また新しく得られた surface は, S と同じ complexity をもつ。

この新しい surface に Case 1~5 の議論が適用出来れば complexity が下がる。もし適用出来ないならば上と同様 surface 上の a plateau を押し上げて新しい plateau を作る。この方法で Γ 下も complexity が下がるなかったとする。この時, a surface 上の a plateau P_r で $|X(P_r)| > w(K)$ なるものが存在する。
 $\xrightarrow{\text{see 4.2}}$

この時 ∂P_r の component で surface 上の disk を bound するものか
 とれるからこれを用いて次のように complexity を下げられる。



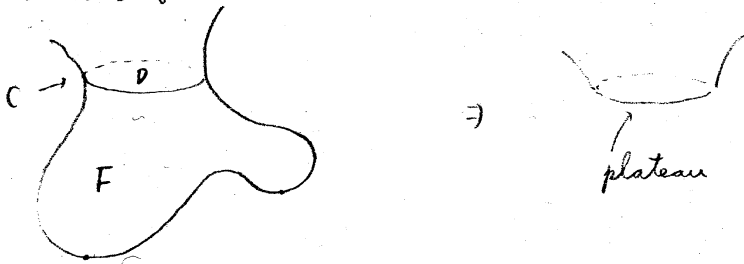
この中 K は 通る (① def. of $w(K)$)

以上の考察により S を min. complexity にとれば S 上に

plateau は存在しない事がわかる。従って、この S が normal form にある事を見る為には、あと 4.8.4) の条件をみたす事を確かめればよい。

Case 7 $\exists Q$: level plane, $\exists C$ a component of $Q \cap S$ s.t. C bounds a disk D in $Q - S$, C bounds a disk F in S s.t. F is not normal form.

この時 次のように S_1 を取り変える事により complexity を下げられる。



(注: Gabai は、論文の中で Case 7 を上のように取り扱っているが、実際には、Case 7 は起り得ないと思われる。)

Step. 2

Lemma 4.21. B : a branched surface in normal form w.r.t. K s.t.

$S(B)$: taut,

$S(B) = (M, \tau) \xrightarrow{S} (M', \tau')$: a sutured mfd. decomp. s.t.

- V : a comp. of $R(M) \Rightarrow S \cap V$: 向きまた向き ∂V parallel to simple closed curves or arcs.
- (M', τ') : taut

R : the components of $R(M)$ which intersects S ,

S_r : the properly embedded surface in M obtained by oriented cut and paste surgery with S and r parallel copies of R .

$(M, r) \xrightarrow{S_r} (M', r') : \text{sutured mfd. decomp.} \Rightarrow \text{MT 得る M}$

branched surface を B_r とする。(以上が Lemma の仮定)

$\Rightarrow \exists r$ s.t. B_r は rel ∂ isotopy T branched surface in normal form に isotopic.

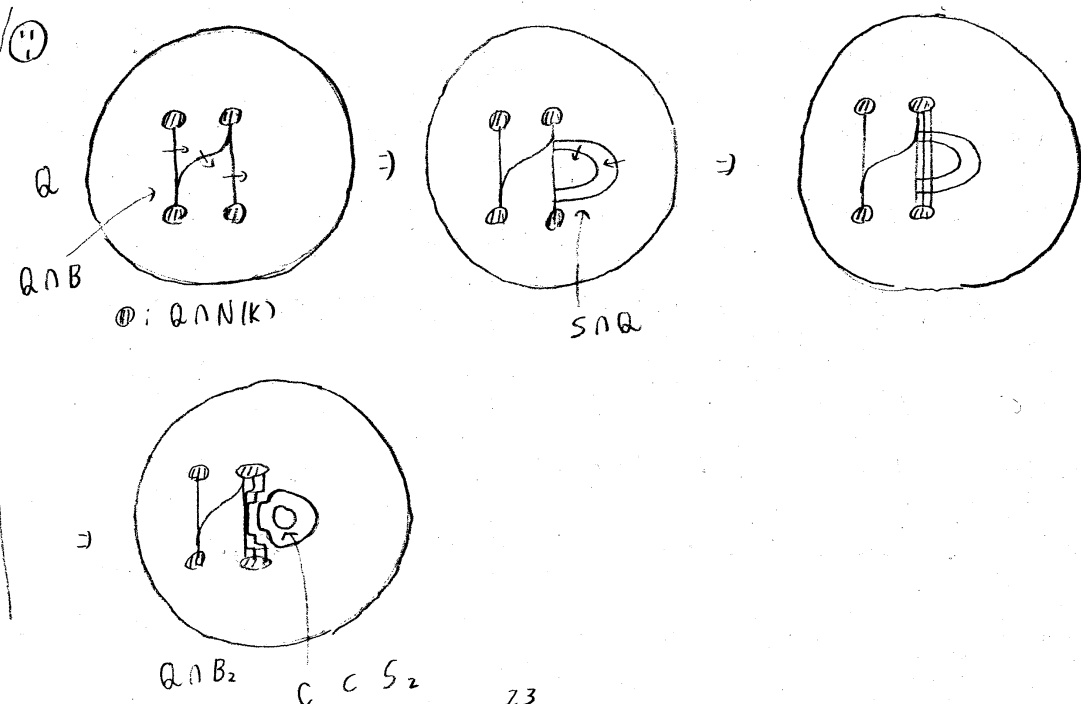
Proof. S_1 を次のように isotopy 移動かす。

- S_1 は, B の saddle, center の nbhd. と disjoint.
- $h|_{S_1}$ は, Morse fun. centers in normal form
- S は, isolated saddle, plateaus / h 外 T 横断的.
- B の branched locus は, Def. 4.8 b) をみえす。

$\Rightarrow T$

" m を十分大きくとれば, 次のように出来る:

$n > m$ とすれば $Q \cap B_n$ が smooth circle C T $Q - (B_n \cup N(K))$ の disk component \hookrightarrow a level plane
 を bound するようになるものを含む $\Rightarrow C \subset S_n$, or C は B_n 内の
 disk T center in normal form を含むようになるものを bound する"



m' : the number of plateaus and centers of S_m とし $r = m + m'$ とする。

この時, $\Omega = \{\text{centers and plateaus in } B_r \text{ which are contained in } S_m\}$ とし

Ω の complexity を $C(\Omega) = 3|\text{plateaus の個数}| + 2|\text{centers の個数}|$ で定めれば,

後は Step 1 と同様に議論が進行して Lemma が証明出来る。

Step 3. (Proof of Lemma 4.19)

まず S_1 に Step 1 を apply して normal form S_1^1 に持ち替へる。次に

S_2 に Step 2 を apply し 新 (1) sutured mfd. の seq. :

$$(M_0, T_0) \xrightarrow{S_1^1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2^2} (M_2^1, T_2^1) \xrightarrow{S_3^3} (M_3^2, T_3^2) \xrightarrow{S_4^4} \cdots \xrightarrow{S_m^m} (M_m^1, T_m^1)$$

を得る。(S_1^1 と S_2^2 から定まる branched surface は normal form に持ち替へる)

次に S_3^3 に Step 2 を apply する --- 以下二行をくり返してゆけば,

Lemma 4.19 の, sutured mfd. decomp. の seq. を得る。

Lemma 4.22. $L \subset S^3 - \overset{\circ}{N}(K)$: a finite depth lamination with incompressible leaves, W : a lamination obtained by thickening L , (M, T) : a taut sutured mfd. embedded in $S^3 - (N(K) \cup W) \Rightarrow (M, T), W$ を isotopy で動かして R のような level plane Q を見つける。

0) $Q \cap K \neq \emptyset$

1) Q は $\overset{\circ}{W}$ 内の有限個の saddles, centers を除いて Q と横断的。

2) $W \cap Q$ の component のうち $Q - (W \cup N(K))$ で disk を bound するようなものは高々 1 個。

3) Q は, M に横断的。 $Q \cap T$ の各 arc component は, T の

essential arc.

4) $Q \cap (\partial M - \dot{E})$ の各 arc component は, $\partial M - \dot{E}$ 上 essential.

Proof. M を isotopy で動かして次のようにする.

∂M は, 有限個の saddles, centers を除いて level 2-spheres と横断的.

∂T は, 有限個の critical points を除いて level 2-spheres と横断的.

全ての tangency は, 相異なる level にある.

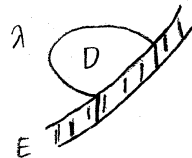
h を K の local min. 上最も高い所にあるものの高さ, α を K の local max. 上 h より高い所にあるもののうち最も低いものの高さとする.



$h < \alpha < \alpha$ とし $Q = Q_\alpha$ とする. この時 $Q \cap E$ の各 component は, \hookrightarrow boundary suture

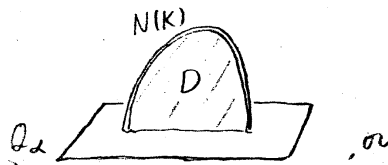
E 中の essential arc.

λ : an arc component of $(\partial M \cap Q) - E$ とする

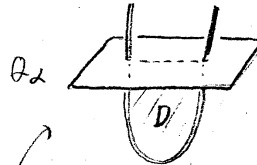


つまり, λ は $\partial M - E$ 上 inessential とし D を λ の compressing disk とする.

この Q_α, λ, D を S^3 の中で見ると次の状況:



このように Q_α を low plane



このように Q_α を high plane と呼ぶ.

$H(S_{\text{resp.}}) = \{\alpha \in [h, \alpha] \mid Q_\alpha \text{ is a high (low resp.) plane}\}$ とおく.

Claim $[h, \alpha] \neq \bar{H} \cup \bar{S}$

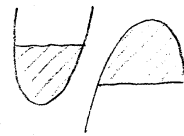
$[h, \alpha] = \bar{H} \cup \bar{S}$ とせよ.

Proof of Claim. / まず次の事実注意到す

" I : an open interval of $[h, \alpha]$ s.t. $\partial M \cap Q_\alpha (\forall \alpha \in I) \Rightarrow 'I \subset H$ or $I \cap H = \emptyset'$ "

' $I \subset S \cap I \cap S = \emptyset$ ' また ' $h \in \bar{H}, \alpha \in \bar{S}$ '

1) Claim が成立しているとする。 即ち,



この時 " $\exists \alpha \in [h, \alpha]$ s.t. $\partial \alpha$ は ∂M に tangent"

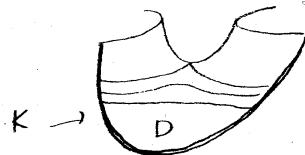
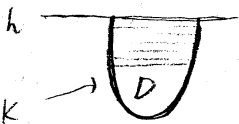
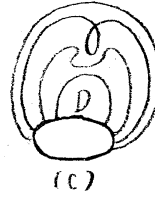
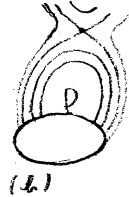
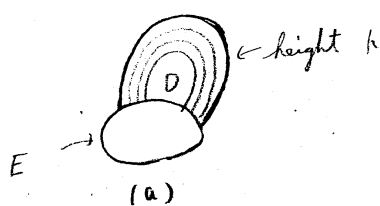
(1) $\forall \alpha, \partial \alpha \not\subset \partial M$ とする上の注意より $\bar{H} = \bar{S} = [h, \alpha]$.

即ち $\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \text{B} \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \hline \text{A} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{A} \end{array} : K \text{ が thin presentation に矛盾.}$

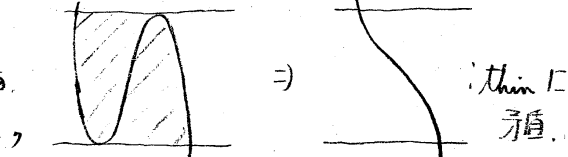
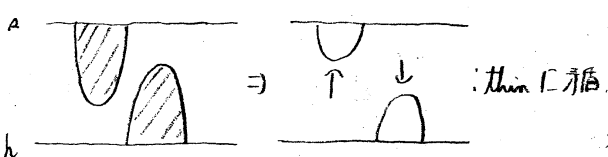
この時, $\alpha \in (\alpha - \varepsilon, \alpha) \Rightarrow \alpha \in H, \alpha \in (\alpha, \alpha + \varepsilon) \Rightarrow \alpha \in S$

1) Claim によ, $\tau \partial M$ 上に induce される foliation を考え τD に沿,

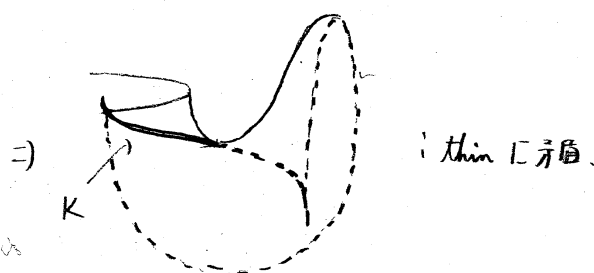
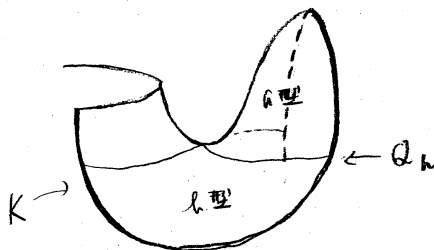
τD を外側に延ば, τ 押く事により次の3つの cases を得る.



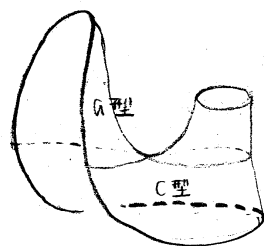
$\partial \alpha$ の上に A 型, 下に A 型の disk がある時. 次の2つの状況を得る.



A 型, B 型の時.



A 型, C 型の時.



即ち、この時 K は、unknot: 矛盾.

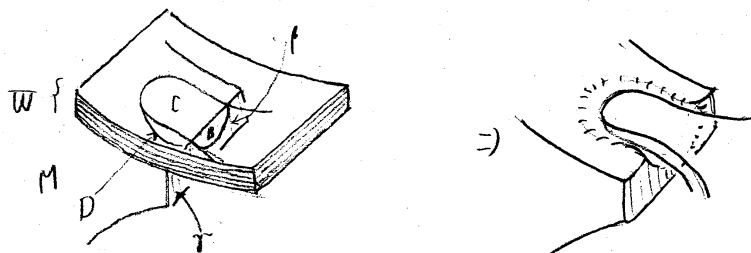
Q_α の取り方より A 型, C 型の組み合わせはなり事がわかる.

以上, Claim の証明終り.

Claim. より $\exists \alpha$ ($h < \alpha < n$) s.t. $Q_\alpha \neq \text{high, low plane}$ また $Q \not\subset L, Q \not\subset M$ としてよい. 以下この Q_α が Lemma の条件をみたす事をみる.

まず L が normal form より (1) は O.K. h, n の取り方より (2) も O.K. α の取り方より (4) も O.K. 従って, あと (3) をみたすように M を変形する.

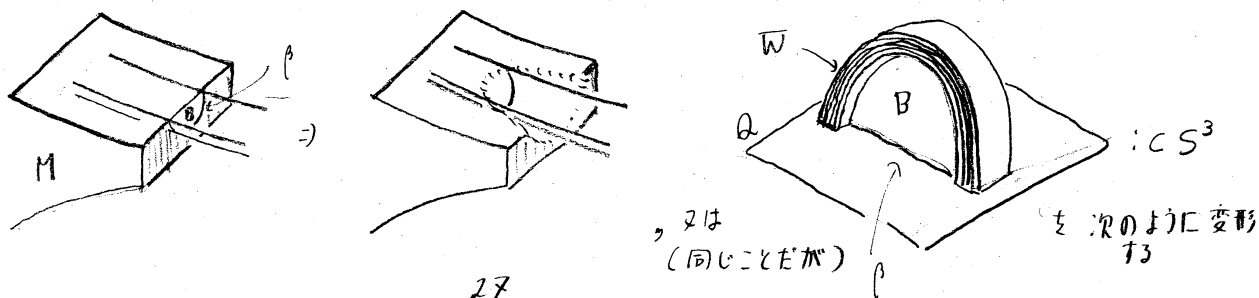
• β : a comp. of $Q \cap R$, $\exists D \subset Q$: a disk s.t. $\partial D \subset \partial W$, $\partial D \cap W \cap R = \emptyset$ とする. この時, 次のように M を isotopy 下動かして β をはずしてしまふ.

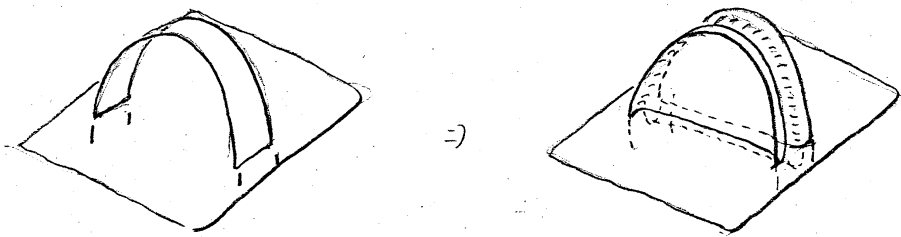


従って $Q \cap R$ の各 comp. は, $Q - \overset{\circ}{W}$ 上 essential としてよい.

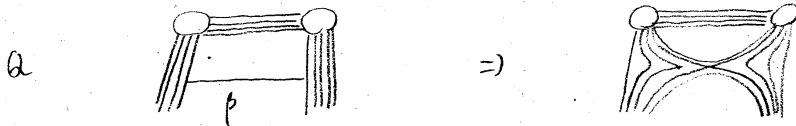
• β : a comp. of $Q \cap R$, inessential in R , essential in $Q - \overset{\circ}{W}$ とする.

この時, 次のように W, M を動かして β をはずしてしまふ.





この時, $Q \cap W$ の pattern は \mathbb{R} のように変化する。



以上より $Q \cap T$ の comp. \neq inessential なものは全て消せる。

Lemma 4.24. $(S^3 - \dot{N}(K), \partial N(K)) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, T_m)$: a seq. of sutured mfd. decomp. s.t.
 $\bullet (M_i, T_i)$: taut $\bullet S_i \cap \partial N(K)$: a union of simple closed curves
 $\bullet V$: a comp. of $R(T_{i-1})$ とすると $S_i \cap V$ は, 向きを正逆の ∂ parallel to non-sep. simple closed curves, or arcs.

$\Rightarrow \exists Q$: level 2-sphere s.t. $\bullet Q \cap K \neq \emptyset$, $\bullet Q \cap M$,

$\bullet Q \cap T$ ($Q \cap (\partial M - \dot{E})$ resp.) の各 comp. は, T ($\partial M - \dot{E}$ resp.) \neq essential

$\bullet Q \cap M = \{I_1, \dots, I_r\} \cup D$, $D = \emptyset$, or a disk, $\sum_{i=1}^r \frac{|I_i \cap \partial T|}{4} - \chi(I_i) \leq |Q \cap K| - 1$,

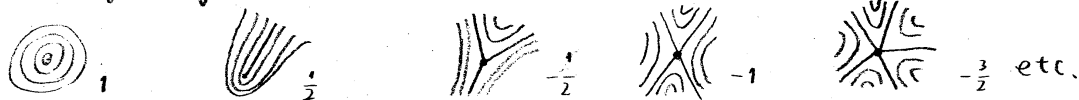
Proof. 4.16 より, $S^3 - \dot{N}(K)$ 上の finite depth lamination L が定まる。

(M_i, T_i) : taut より L の各 leaf は, incompressible. 4.19, 4.10 より L は, normal form にあるとしてよい。

とする。この時, $Q - \dot{N}(K)$ 上の lamination $Q \cap L$ を \mathbb{R} のように singular foliation に拡張する。



二二 各 singularity 上の index を次のように定める。



二の時, $\chi(Q - \dot{N}(K)) = \sum (\text{index of singularities})$ (Poincaré-Hopf index formula)

$$\text{従って } \sum_{i=1}^r \chi(Q_i) - \frac{|\partial Q \cap \partial R|}{4} = \sum_{i=1}^r \text{index}(Q_i \text{ 内の sing.})$$

$$\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^i \text{index}(Q_i \text{ 内の sing.}) = 1 - |Q \cap K|$$

§5

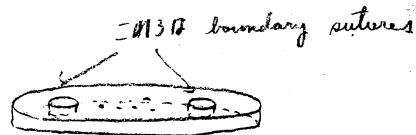
Lemma 5.1. K : a knot, $(S^3 - \dot{N}(K), \partial N(K)) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, T_m)$ is a seq.

of sutured mfd. decomp. n.t. $(M, T) - (M_m, T_m)$: taut

$\partial \hat{M}$: a union of 2-spheres, S_i : not a compressible torus, $S_i \cap \partial N(K)$: union of circles,

V : a comp. of $R(T_{i-1})$ とすると, $S_i \cap V$ は, 向きまたは ∂T parallel な simple closed curves or arcs \Rightarrow 次の (1) が成り立つ.

1) (M, T) : a product sutured mfd. 特に Y の形は



2) $\exists P \subset S^3 - \dot{N}(K)$: a planar surface, $\exists Q \subset S^3$: a sphere n.t.

$|K \cap Q| = \mu > 0$, $P \cap \partial N(K)$: a union of $\nu (> 0)$ coherently oriented longitudes,

$\lambda = \partial P - \partial N(K)$: a simple closed curve n.t. $|K \cap Q| \leq \mu - 2$

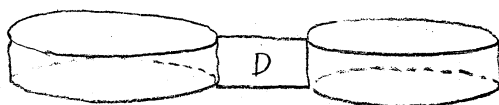
no component of $P - Q$ is a disk F with $\bar{F} \cap Q$ connected

Q は Lemma 4.24 のようにとる

Proof (of very special case.) $E = \{A_1, \dots, A_{2\mu}\}$: boundary sutures

E の元の間に次の relation \sim が生成される equivalence relation を \sim

とする: $A_i \sim A_j \Leftrightarrow \exists D$ a rectangle of $Q \cap M$ (D.t.) $D \cap A_i \neq \emptyset, D \cap A_j \neq \emptyset$

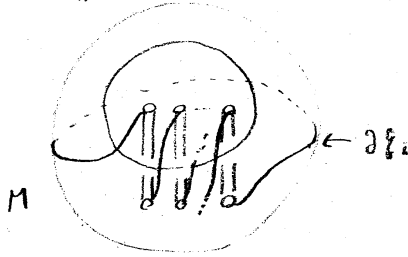


X_1, \dots, X_t を上の equivalence class, 1) また $t=1$ の時に Lemma を証明する
 事にする. 結論 1) が成立しないとする

" $|I_i \cap \Gamma| = 2 \Rightarrow I_i \cap (\Gamma - E) = \emptyset$, or $I_i \neq D^2$ " (注: $I_i \cap E \neq \emptyset$) となる.
 \rightarrow See 4.24.

R_{\pm} : component of $R(\Gamma)$ を左のように定
 める.
 1) また K は 0-framed surgery した mfd. が
 lens space 成分を含まない事より ∂I_i
 が E と $\Gamma - E$ を交互に渡るような disk I_i は存在しない. 即ち.

≠ I_i disk o.t.



D_{\pm} : the disk R_{\pm} reduced in size to eliminate trivial intersections with Q (?)

とすると, 従って, $|I_i \cap \partial D_+| + |I_i \cap \partial D_-| \leq 2 (|\partial I_i \cap \partial \Gamma|/4 - \chi(I_i))$

従って, Lemma 4.24 より $\sum |I_i \cap \partial D_+| + \sum |I_i \cap \partial D_-| \leq 2 \sum (|\partial I_i \cap \partial \Gamma|/4 - \chi(I_i))$
 $\leq 2|Q \cap K| - 2 = 2(\mu - 1)$ 故に $D_+ \cap M$ または $D_- \cap M$ が求める P .

一般の場合について Γ は, Gabai [G2] 参照.

§6.

条件を全て満たす

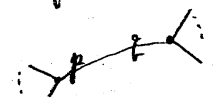
Lemma 6.1. S^2 上には, 次のような (labell付) グラフは存在しない.

1). Γ は $\nu+1$ vertices をもつ. そのうち ν 個は,

μ ($\neq 0$, even) 個の edges が集まる, 残りの vertex w は m ($0 \leq m \leq \mu-2$) 個の edges が集まる

2) valency μ vertex から出る edges は, 時計方向に $1, 2, \dots, \mu$ と 1

う labeling がなされ 113。

3)  一つの edge の両端に label がつけられている時,
その一方は偶数で他方は奇数。

4) D : the closure of a comp. of $S^2 - G$ which is a disk, $D \cap M = \emptyset$ この時

$\partial D \cap G$, 7 edge の label を読んでゆくときそれは

$(j, j-1, j, j-1, \dots, j, j-1) \bmod \mu$ という形ではない。

証明略。

§7. Proof of Theorem

Step 1. 3.6 より $(S^2 - N(K), \partial N(K))$ から始まる sutured mfd. decomp. の seq. を得る。

Step 2. 4.20, Step 1 より $S^2 - N(K)$ 内の finite depth lamination L を得る。 L が $S^2 - N(K)$ の foliation \mathcal{F} に拡張しないとする。この時 5.1 の結論 2) が成立して P, Q が存在する。ところが 6.1 よりそのような P, Q は存在しない事がわかる。従って L は常に foliation \mathcal{F} に拡張する。

References.

[G 1] D. Gabai "Foliations and the topology of 3-mflds", J. Diff. Geom. 18 (1983), 445 ~ 503

[G 2] ——— "Foliations and the topology of 3-mflds II", preprint.

[H] J. Hempel, 3-mflds, Ann. Math. Studies 86.

[T] W. Thurston, "Norm on the homology of 3-mflds" preprint